CONCOURS D'ADMISSION A L'E.S.M. DE SAINT-CYR EN 1982

•

CONCOURS SCIENCES

CALCUL NUMERIQUE

Durée : 2 heures

Mercredi 5 mai 1982 de 14 heures à 16 heures

•

Le candidat est invité à préciser les moyens de calcul qu'il utilise (règle ou cercle à calcul, tables numériques, calculette avec ou sans fonctions mathématiques, programmable ou non) en indiquant la précision procurée par ces outils. Les calculs seront présentés dans des tableaux clairs où figureront tous les résultats intermédiaires.

—(1)—

A tout entier $n \geqslant 0$, on associe la série entière dont le terme général :

$$t_{n,i}(x) = \frac{(-1)^i \left(\frac{x}{2}\right)^{2i+n}}{i!\,(n+i)!}$$

dépend de l'indice $i \in \mathbb{N}$ et de la variable réelle x.

a) Montrer que le rayon de convergence de cette série est infini et en déduire que sa somme est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ que nous notons J_n :

$$J_n(x) = \sum_{i=0}^{\infty} t_{n,i}(x)$$

b) Montrer que :

$$J_0'(x) = -J_1(x), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

c) Montrer que :

$$J_n'(x) = \frac{[J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)]}{2}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \forall\, n \geqslant 1.$$

d) Montrer que :

$$nJ_n(x) = [J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x)] \times \frac{x}{2}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \forall\, n \geqslant 1.$$

—(2)—

Le nombre réel y étant fixé, on définit pour $i \in \mathbb{N}$ les nombres $u_i(y)$ et $v_i(y)$ au moyen de l'initialisation :

$$u_0(y) = v_0(y) = 1$$

et des relations de récurrence suivantes :

$$\left.\begin{aligned} u_i(y) &= v_{i-1}(y) \times \frac{y}{i} \\ v_i(y) &= \frac{u_i(y)}{i+1} \end{aligned}\right\} \quad \text{pour } i \geqslant 1.$$

.../...

Posons encore :

$$U_k(y) = \sum_{i=0}^{k} u_i(y) \qquad \text{et} \qquad V_k(y) = \sum_{i=0}^{k} v_i(y), \ \forall\ k \geqslant 1 .$$

a) Montrer que, si on choisit $y = -\left(\frac{x}{2}\right)^2$, on a :

$$t_{0,i}(x) = u_i(y) \qquad \text{et} \qquad t_{1,i}(x) = v_i(y) \times \frac{x}{2}, \ \forall\ x \in \mathbb{R}, \ \forall\ i \in \mathbb{N}.$$

b) En déduire que, lorsque k tend vers l'infini, $U_k(y)$ et $V_k(y)$ tendent respectivement vers deux nombres $U(y)$ et $V(y)$ vérifiant :

$$J_0(x) = U(y) \qquad \text{et} \qquad J_1(x) = V(y) \times \frac{x}{2}.$$

c) Montrer que, pourvu que $k \geqslant \sqrt{|y|} - 1$, nous avons :

$$\left|U_k(y) - U(y)\right| < \left|u_{k+1}(y)\right| \qquad \text{et} \qquad \left|V_k(y) - V(y)\right| < \left|v_{k+1}(y)\right| .$$

d) Montrer que cette dernière propriété permet de calculer $U(y)$ et $V(y)$ avec une précision ϵ fixée à l'avance.

3

a) Pour $x = 0, 1, 2$ et 3, calculer $J_0(x)$ et $J_1(x)$ avec la précision $\epsilon = 10^{-2}$.

b) Utiliser les relations établies dans la première partie pour expliciter :

1) $J_i(x)$ en fonction de :

$U(y)$ et $V(y)$ pour $i = 0, 1$ et 2.

2) $J^{(i)}(x)$ en fonction de :

$J_0(x)$, $J_1(x)$ et $J_2(x)$ pour $i = 1, 2$ et 3.

En particulier, on vérifiera que :

$$J_2(x) = V(y) - U(y) \qquad \text{et} \qquad J_0'''(x) = J_1(x) - \frac{J_2(x)}{x}.$$

c) Pour $x = 1, 2$ et 3, calculer :

$$J_0'(x), \quad J_0''(x) \quad \text{et} \quad J_0'''(x) .$$

4

a) Appliquer la méthode de Newton pour calculer avec une précision de 10^{-2} :

1) La racine de J_0 comprise entre 2 et 3.

2) La racine de J_0'' comprise entre 1 et 2.

Dans les deux cas, on partira de $x_0 = 2$.

b) Utiliser les résultats numériques obtenus pour tracer le graphe de $J_0(x)$ sur l'intervalle $[0, 3]$.

FIN

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail